29/05/2018

Συμπεράσματα:

(1) Εάν $y_1, y_2, \ldots, y_n$ είναι θεμελιώδη ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς γραμμικού διαφορικού συστήματος (E_0) τότε εάν u είναι λύση (E_0) υπάρχουν μοναδικά ορισμένες σταθερές $c_1, c_2, \ldots, c_n$ τ.ω.

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + \ldots + c_nu_n(t)$$

(2) Εάν $\Phi(t)$ είναι θεμελιώδης πίνακας του (E_0) τότε u είναι λύση του (E_0) αν και μόνο αν υπάρχει n-διάστατο διάνυσμα c τ.ω $u(t)=\Phi(t)\cdot c$

(3) Εάν $t_0 \in I$ και u_0 είναι ένα n-διάστατο διάνυσμα τότε η λύση του (E_0) η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$u(t_0)=u_0$$

δίνεται $u(t)=\Phi(t)\cdot \underbrace{\Phi(t_0)^{-1}\cdot u_0}_{c}$

NO.

Date

ΑΣΚΗΣΗ:

Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

και το ομογενές σύστημα $y' = Ay$

(i) Να δείξετε ότι:

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^x & x\cdot e^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)\cdot e^x & 2\cdot e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4\cdot e^{2x} \end{pmatrix}$$

είναι ένας πίνακας λύσεων και να βρείτε την ορίζουσα του.

(ii) Να δείξετε ότι

$$y(x) = \begin{pmatrix} (x-1)\cdot e^x \\ x\cdot e^x \\ (x+1)\cdot e^x \end{pmatrix}$$

είναι μια λύση του (Εο).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$y'(x) = \begin{pmatrix} (e^x)' & (x\cdot e^x)' & (e^{2x})' \\ (e^x)' & [(x+1)e^x]' & (2\cdot e^{2x})' \\ (e^x)' & [(x+2)\cdot e^x]' & (4\cdot e^{2x})' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & (x+1)\cdot e^x & 2\cdot e^{2x} \\ e^x & (x+2)\cdot e^x & 4e^{2x} \\ e^x & (x+3)\cdot e^x & 8\cdot e^{2x} \end{pmatrix}$$

Επίσης

$$A(x)\,y(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & x\cdot e^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)\cdot e^x & 2\cdot e^{2x} \\ e^x & (x+2)\cdot e^x & 4\, e^{2x} \end{pmatrix} =$$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} e^x & (x+1)\cdot e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)\cdot e^x & 4\cdot e^{2x} \\ e^x & (x+3)\cdot e^x & 8\cdot e^{2x} \end{pmatrix}$$

Άρα y είναι πίνακας λύσεων του (Εο)

(i) Από τον τύπο Jacobi έχουμε

$$|y(x)| = |y(x_0)| \exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(s)\, ds\right)$$

για $x_0 = 0$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

και $\operatorname{tr} A = 0 + 0 + 4 = 4$

οπότε

$$|y(0)| = \dots = 1$$

Άρα $|y(x)| = 1 \cdot \exp \int_0^x 4 \, ds = \exp(4x)$

(ii) Για να είναι y λύση αρκεί να υπάρχει $c = (c_1, c_2, c_3)$ τέτοιο ώστε $y(x) = \underbrace{Y(x)}_{\text{βασικός πίνακας}} \cdot c$

$$\begin{pmatrix} (x-1) \cdot e^x \\ x \cdot e^x \\ (x+1) \cdot e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & x \cdot e^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1) \cdot e^x & 2 \cdot e^{2x} \\ e^x & (x+2) \cdot e^x & 4 e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Με πράξεις βρίσκω $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 1, 0)$

ΑΣΚΗΣΗ: Δίνεται το ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y'(t) = A y(t) \quad (E_0)$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = \begin{pmatrix} t \cdot e^t \\ (t+1) \cdot e^t \\ (t+2) \cdot e^t \end{pmatrix}$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του (E_0)

Απάντηση:

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad A y_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} = y_1'(t)$$

Όμοια $y_2'(t) = A y_2(t)$

Άρα y_1, y_2 είναι λύσεις του (E_0).

NO.

Date

Οι λύσεις y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του (E_0) αν και μόνο αν για $t_0 \in I$ ισχύει ότι $y_1(t_0)$, $y_2(t_0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα

για $t_0 = 0$

$$y_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1 y_1(0) + c_2 \cdot y_2(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή $\Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$

Άρα $y_1(0)$ και $y_2(0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Άρα και y_1, y_2 γραμμικά ανεξάρτητες.

▶ Θεωρούμε το σύστημα

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t), \quad t \in I \quad (E)$$

όπου $A(t)$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας συνάρτηση συνεχής στο I και b συνεχής στο I (διανυσματική συνάρτηση)

Υποθέτουμε ότι $\Phi(t) = (\varphi_{ij})$ είναι ένας βασικός πίνακας λύσεων του (E_0). Έχουμε το ακόλουθο:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν $\Phi(t)$ βασικός πίνακας λύσεων του (E_0) τότε η

$$u(t) = \Phi(t) \cdot \Phi(t_0)^{-1} \cdot u_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} b(s)\, ds, \quad t \in I$$

είναι λύση του (E) που ικανοποιεί τη συνθήκη $u(t_0) = u_0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μεταβολής σταθεράς θα έχουμε μια λύση του (Ε) της μορφής

$$u(t)=\Phi(t)\cdot c(t) \quad (*)$$

όπου $c(t)$ θα είναι κατάλληλα επιλεγμένο διάνυσμα.

Έχουμε από (*) με παραγώγιση

$$u'(t)=\Phi'(t)\,c(t)+\Phi(t)\cdot c'(t)$$

(ή) $u'(t)=A(t)\Phi(t)\cdot c(t)+\Phi(t)\cdot c'(t)$ (1)

αλλά u είναι λύση του (Ε)

οπότε

$$u'(t)=A(t)u(t)+b(t) \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε

$$A(t)u(t)+b(t)=A(t)\cdot\Phi(t)\,c(t)+\Phi(t)\cdot c'(t)$$

$$\cancel{A(t)\Phi(t)c(t)}+b(t)=\cancel{A(t)\Phi(t)c(t)}+\Phi(t)\cdot c'(t)$$

(ή) $b(t)=\Phi(t)\cdot c'(t)$ (3)

Επειδή $\Phi(t)$ είναι βασικός πίνακας λύσεων του (E_0) έχουμε $|\Phi(t)|\neq 0$ και Φ αντιστρέψιμος

Άρα $c'(t)=\Phi(t)^{-1}\cdot b(t)$

άρα με ολοκλήρωση από το t_0 ως t

$$c(t)=c(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}\,b(s)\,ds. \quad (4)$$

όπου $c(t_0)$ σταθερό διάνυσμα

Άρα,

$$u(t)=\Phi(t)c(t)\overset{(4)}{=}u(t)=\Phi(t)\left(c(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}\,b(s)\,ds\right)$$

ή

$$u(t)=\Phi(t)\cdot c(t_0)+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}\,b(s)\,ds$$

αλλά

$$u(t_0)=\Phi(t_0)\,c(t_0)\Rightarrow c(t_0)=\Phi(t_0)^{-1}\cdot u(t_0) \quad (5)$$

Άρα

$$u(t)=\Phi(t)\,\Phi(t_0)^{-1}\,u(t_0)+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi(s)^{-1}\,b(s)\,ds$$

NO.

Date

ή αλλιώς

$$u(t) = y(t) + \phi(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \phi(s)^{-1} \cdot b(s)\, ds$$

όπου y είναι λύση του (Σ_0)

που ικανοποιεί τη συνθήκη

$y(t_0) = u_0$ (που σύμφωνα με τις παρατηρήσεις

έχει τη μορφή

$y(t) = \phi(t)\, \phi(t_0)^{-1} \cdot u_0$)

Επαλήθευση:

Πράγματι $u(t_0) = y(t_0) = u_0$.

και $u'(t) = y'(t) + \phi'(t) \int_{t_0}^{t} \phi(s)^{-1}\, b(s)\, ds + \phi(t) \cdot \phi(t)^{-1} \cdot b(t) =$

$= A(t)y(t) + \phi'(t) \int_{t_0}^{t} \phi(s)^{-1}\, b(s)\, ds + b(t)$

$\overset{(3)}{=} A(t)y(t) + \phi'(t) \int_{t_0}^{t} \phi(s)^{-1}\, \phi(s)\, c'(s)\, ds + b(t)$

$= A(t)y(t) + \phi'(t) \int_{t_0}^{t} c'(s)\, ds + b(t)$

$= A(t)y(t) + \phi'(t) \left(c(t) - c(t_0)\right) + b(t)$

$= A(t)y(t) + \phi'(t)\, c(t) + \phi'(t)\, c(t_0) + b(t)$

$= A(t)\, \phi(t) \cdot \phi(t_0)^{-1} \cdot u_0 + A(t)\phi(t)\, c(t) - A(t)\phi(t)\, c(t_0) + b(t) =$

$\overset{(5)}{=} A(t)\phi(t) \cdot \cancel{\phi(t_0)^{-1}} \cdot u_0 + A(t)\phi(t)c(t) - A(t) \cdot \phi(t)\, \cancel{\phi(t_0)^{-1}} \cdot u_0 + b(t) =$

$= A(t)\phi(t)c(t) + b(t) = A(t)u(t) + b(t)$

ΑΣΚΗΣΗ: Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

με $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

αφού πρώτα διαπιστώσετε ότι

$$y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του (E_0)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Για να δείξουμε ότι

$Y(t)$ είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων αρκεί ν.δ.ο

$$Y'(t) = A\,Y(t)$$

Έχουμε

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

$A\,Y(t) = \dots = Y'(t)$

Άρα Y είναι ένας πίνακας λύσεων

Επιπλέον

$$|Y(t)| = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0$$

Άρα Y είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων.

Οπότε η λύση y του (E) που ικανοποιεί τη συνθήκη $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} = u_0$.

δίνεται

$$y(t) = Y(t)\,Y\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} u_0 + Y(t) \int_{t_0}^{t} Y(s)^{-1} b(s)\,ds$$

όπου $b(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$

Έχουμε

$$Y(s)^{-1} = \frac{1}{|Y(s)|} \cdot \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}$$

$$Y\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Οπότε

$$Y(s)^{-1} b(s) = \begin{pmatrix} s^2 \cos s + s\cos s \\ s^2 \sin s - s\cos s \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\int_{\pi/2}^{t} Y(s)^{-1} b(s) = \begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix}$$

NO.

Date

όπου $A(t) = \int_{\pi/2}^{t} (s^2\cos s + s\cos s)\,ds = \cdots = t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t + 2$

$+ t\sin t - \frac{\pi}{2} + \cos t - \frac{\pi^2}{4}$

και

$B(t) = \int_{\pi/2}^{t} (s^2\sin s - s\cos s)\,ds = \cdots = -t^2\cos t + t\sin t - \frac{\pi}{2} + \cos t$

Επίσης,

$$Y(t) \int_{\pi/2}^{t} Y(s)^{-1} b(s)\,ds = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos t)\cdot A(t) + (\sin t)B(t) \\ -(\sin t)A(t) + (\cos t)B(t) \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

$$z_1(t) = (2t+2)\cos^2 t + \left(t - 2 - \frac{\pi}{2}\right)\cos t\sin t + \left(2 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}\right)\cos t + t\sin^2 t$$

$$z_2(t) = (-t^2 - t + 2)\sin^2 t + (-2t - 2 + t)\cos t\sin t + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{24}\right)\sin t + (1 - t^2)\cos^2 t - \frac{\pi}{2}\cos t$$

Ακόμη,

$$Y\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} y_0 = \cdots = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και

$$Y(t)\cdot Y\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\cdot y_0 = \begin{pmatrix} -2\cos t + \sin t \\ 2\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

Άρα, λύση

$$y(t) = \begin{pmatrix} -2\cos t + \sin t \\ 2\sin t + \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$